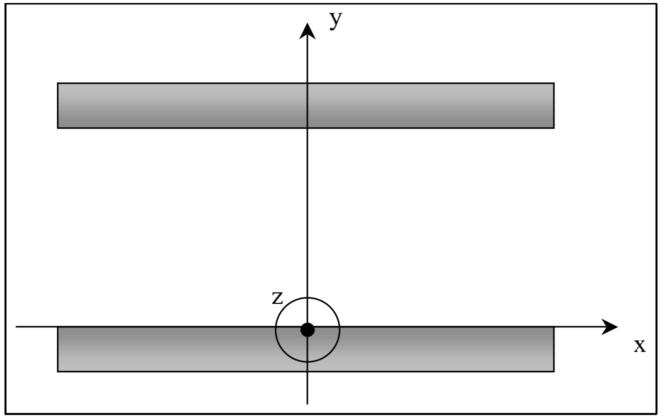
TD N° 14: ELECTROMAGNÉTISME
OEM dans les milieux ohmiques - réflexion métallique - cavités résonnantes

Applications du cours

EXERCICE N°1: **Propagation d'une onde entre deux plans métalliques infinis**

Une onde électromagnétique de pulsation ω se propage dans le vide dans la direction $[Ox)$ entre deux plans métalliques infinis parallèles placés en $y = 0$ et $y = a$. Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est polarisé dans la direction $[Oz)$ et son amplitude E_0 ne dépend que de la variable y. De même, les amplitudes des composantes du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ ne dépendent que de y.



❶ Déterminer les composantes du champ magnétique en fonction notamment de E_0.

❷ Déterminer l'expression générale de l'amplitude du champ électrique en fonction de y.

❸ En déduire la relation de dispersion. Commenter.

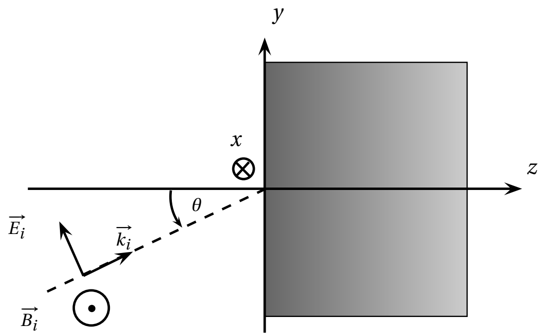
❹ Déterminer l'expression de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe. Conclure.

Exercices à caractère technique

EXERCICE N°2: **Réflexion d'une onde sur un conducteur parfait en incidence non normale**

On considère une onde plane, progressive, monochromatique, de pulsation ω, polarisée rectilignement, se propageant dans le vide dans le demi-espace $z < 0$.

Le champ électrique de l'onde incidente est contenu dans le plan $[Oyz)$ et l'onde se réfléchit sous un angle d'incidence θ sur un conducteur parfait (métal de conductivité infinie). On admettra que l'onde se réfléchit suivant la loi de Snell-Descartes.



❶ Ecrire les expressions des champs électrique et magnétique de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

❷ Déterminer le champ électromagnétique résultant dans le demi-espace $z < 0$. Commenter.

❸ Montrer que le conducteur porte une charge surfacique σ et est parcouru par un courant surfacique de densité $\overrightarrow{j_s}$, dont on donnera les expressions.

EXERCICE N°3: **réflexion des OEM sur une surface périodique**

On considère une OPPH polarisée rectilignement d'expression (attention: la convention d'écriture de la phase n'est pas celle retenue en cours):

$$\overrightarrow{E}_i(\overrightarrow{r},t) = E_0 \cdot e^{j(\overrightarrow{k_i}\cdot\overrightarrow{r}-\omega t)} \cdot \overrightarrow{e_z} \qquad \text{avec } ||\overrightarrow{k_i}|| = k = \frac{\omega}{c}$$

Elle tombe sur la surface d'un métal parfaitement conducteur, définie par son équation cartésienne $y = f(x)$, f étant une fonction de période a. On cherche l'onde réfléchie sous la forme:

$$\overrightarrow{E_r} = \underline{E}_r(x,y,z)\cdot e^{-j\omega t}\cdot\overrightarrow{u_z}$$

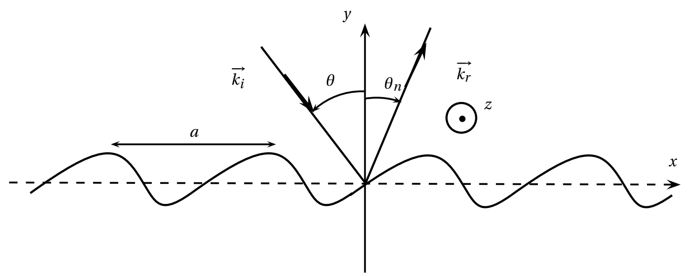
❶ Montrer que $\underline{E}_r$ est indépendant de z.

❷ On cherche donc $\underline{E}_r$ sous la forme $\underline{E}_r = A\cdot e^{j(\alpha x+\beta y)}$. Montrer que α ne peut prendre que les valeurs discrètes $\alpha_n = k\sin\theta + n\dfrac{2\pi}{a}$, θ étant l'angle défini sur la figure ci-contre.

❸ Quelle est la direction donnée par $\sin\theta_n$ de l'onde réfléchie correspondant à n (θ_n est repéré par rapport à $\overrightarrow{e_y}$). Commenter ce résultat.

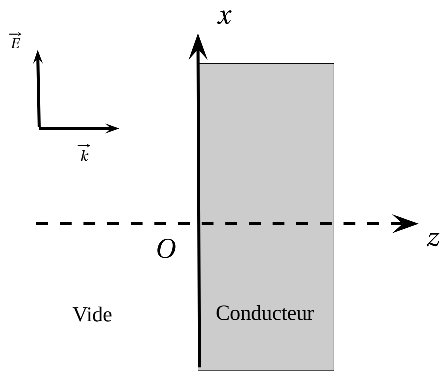
❹ Quelles sont les valeurs de β_n associées à α_n? On distinguera deux cas.

❺ Expliciter $\overrightarrow{E}_r$ sous la forme générale.



EXERCICE N°4: **Réflexion d'une OEM sur un conducteur réel**

Une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω, polarisée rectilignement suivant la direction $[Ox)$, se propage vers les z croissants. Cette onde arrive sur la surface $z = 0$. Un conducteur réel de conductivité γ occupe l'espace $z \geq 0$, la partie de l'espace $z < 0$ étant assimilée au vide.



❶ Justifier que l'on puisse négliger les courants de déplacement face aux courants de conduction. Exprimer l'épaisseur de peau du conducteur.

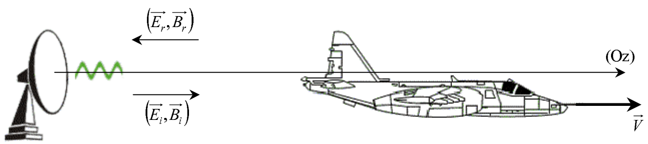
❷ Ecrire les champs électriques et magnétiques associées aux ondes réfléchies et transmises, à l'aide des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude $\underline{r}$ et $\underline{t}$. Déterminer ces coefficients.

❸ Définir et exprimer les coefficients de réflexion et transmission en énergie R et T. En déduire qu'il y a conservation de l'énergie sur l'interface.

EXERCICE N°5: **Mesure de la vitesse d'un aéronef par effet Doppler**

Un radar émet, dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié au sol, une OPPH polarisée rectilignement à laquelle est attaché le champ $\overrightarrow{\underline{E}_i} = E_0\cdot e^{j\omega_i(t-z/c)}\cdot\overrightarrow{e_x}$ se propageant dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}$ supposé galiléen suivant les z positifs. On assimile l'air au vide parfait de sorte que l'onde se propage à la célérité c. Elle tombe en incidence normale sur la surface d'un avion assimilé localement à la surface plane d'une conducteur parfait orthogonal à $[Oz)$. L'avion se déplace à la vitesse constante $V = V\cdot\overrightarrow{e_z}$.

On note r le coefficient de réflexion en amplitude à la surface et ω_f la pulsation de l'onde réfléchie mesurée dans le référentiel $\mathscr{R}$.



Le but de l'exercice est de montrer que du fait du mouvement de l'avion, $\omega_r \neq \omega_i$: c'est l'effet Doppler, et d'en déduire la vitesse de l'avion par mesure de $\omega_i - \omega_r$.

❶ Donner les expressions des champs électromagnétiques $(\underline{\overrightarrow{E}}_i, \underline{\overrightarrow{B}}_i)$, et $(\underline{\overrightarrow{E}}_r, \underline{\overrightarrow{B}}_r)$ associés aux ondes incidentes et réfléchies à la surface du conducteur mobile dans le référentiel $\mathscr{R}$.

❷ On donne la formule de transformation galiléenne des champs entre les référentiels $(\mathscr{R})$ et $(\mathscr{R}')$ en appelant $\overrightarrow{V}_e$ la vitesse d'entrainement du référentiel $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{B'} = \overrightarrow{B} \\ \overrightarrow{E'} = \overrightarrow{E} + \overrightarrow{V_e} \wedge \overrightarrow{B} \end{cases}$$

En déduire les expressions des champs électriques $\underline{\overrightarrow{E'}}_i$ et $\underline{\overrightarrow{E'}}_r$ dans le référentiel $\mathscr{R}'$ lié à l'avion.

❸ Ecrire la relation traduisant la continuité de la composante tangentielle du champ total $\underline{\overrightarrow{E}}'$ dans $\mathscr{R}'$ à la surface du conducteur, en déduire l'expression de $\dfrac{\omega_i - \omega_r}{\omega_i}$ en fonction de $\dfrac{V}{c}$.

❹ Sachant que le radar émet à la fréquence $f_i = 10\ GHz$ et que l'on mesure une différence entre les fréquences de l'onde émise et reçue en retour après la réfléxion sur l'avion de $f_i - f_r = 30\ kHz$, en déduire la vitesse de l'avion.

EXERCICE N°6: **Cavité électromagnétique de confinement**

On considère un parallélépipède rectangle creux formé d'un métal que nous considèrerons comme parfait; l'extension spatiale de ce parallélépipède est:

$$\begin{cases} \frac{X}{2}, -\frac{X}{2} \text{ dans la direction } x \\ \frac{Y}{2}, -\frac{Y}{2} \text{ dans la direction } y \\ \frac{Z}{2}, -\frac{Z}{2} \text{ dans la direction } z \end{cases}$$

Nous allons chercher des modes de propagation possibles du champ électromagnétique dans cette cavité.

❶ Rappeler les équations satisfaites respectivement par les champs électrique et magnétique dans le vide de la cavité.

❷ Rappeler les conditions aux limites que doivent satisfaire les champs au voisinage d'un conducteur parfait.

❸ On cherche une solution de ces équations de la forme:

$$\overrightarrow{E}(x, y, z, t) = f(x, y, z)\mathscr{R}e\left(e^{j\omega t}\right)\overrightarrow{e_y}$$

a· Montrer, en utilisant une équation de Maxwell, que le champ électrique est indépendant de y. En déduire les variables de la fonction f.

b· Quelle est l'équation satisfaite par f?

c· Compte tenu de la géométrie du problème, on propose de séparer les variables x et z. Montrer alors que la fonction f peut se mettre sous la forme:

$$f(x, y, z) = E_0 \cos(\alpha x)\cos(\beta z)$$

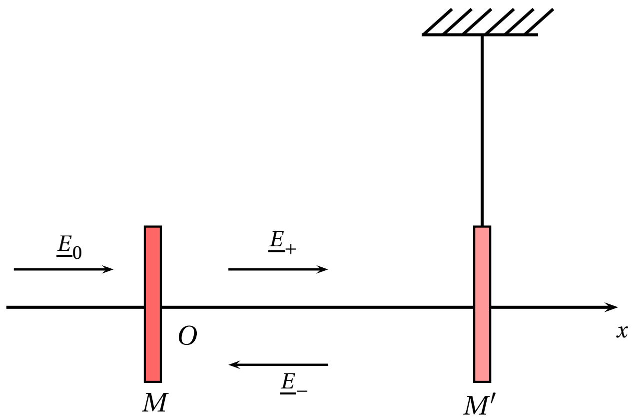
d· Quelles sont les valeurs possibles de α et β. En déduire les fréquences possibles.

EXERCICE N°7: **Cavité électromagnétique à miroirs supendus - conditions de résonance et antirésonance**

Un miroir semi-réfléchissant M est disposé normalement à un axe $[Ox)$. On forme avec un second miroir M' parallèle à M une cavité 1D. Le miroir M situé à l'abscisse $x = 0$ est partiellement réfléchissant et fixe. Le miroir métallique M' est parfait et est situé à l'abscisse $x = L$ en l'absence de rayonnement incident. Il est suspendu à un fil de longueur l dans le champ de pesanteur terrestre d'intensité $\overrightarrow{g} = -g \cdot \overrightarrow{e_z}$, et peut se déplacer parallèlement à lui-même. Son abscisse est alors noté x_0.

Un faisceau laser de pulsation ω et de puissance moyenne $< P_0 >$, assimilable à une onde plane dont l'amplitude du champ éléctrique vaut E_0, arrive sur le miroir M selon la direction $+\overrightarrow{e_x}$.

Il donne naissance à l'intérieur de la cavité à deux ondes progressives se propageant dans les directions positive et négative de l'axe $[Ox)$. Au point O, situé sur le miroir M à l'intérieur de la cavité à l'origine des coordonnées, les champs électriques ont respectivement pour amplitudes complexes $\underline{E}_+$ et $\underline{E}_-$. Le miroir M a pour coefficients de réflexion et de transmission en amplitude les quantités $\underline{r}$ et $\underline{t}$ (avec $|\underline{r}|^2 + |\underline{t}|^2 = 1$). Les amplitudes complexes des champs au point O, vérifient la relation $\underline{E}_{0+} = \underline{t}\underline{E}_0 + \underline{r}\underline{E}_{0-}$.



❶ **a**· Trouver la relation entre $\underline{E}_{0+}$, $\underline{E}_{0-}$, $k = \dfrac{\omega}{c}$ et x_0. En déduire le rapport $\dfrac{\underline{E}_{0+}}{\underline{E}_0}$ en fonction de k et des paramètres de la cavité.

b· Décrire qualitativement la variation en fonction de x_0, à puissance incidente constante, du rapport $G = \dfrac{< P_+ >}{< P_0 >}$ égal au rapport de la puissance lumineuse moyenne $< P_+ >$ de l'onde progressive transmise à la puissance moyenne incidente $< P_0 >$.

Pour quelles valeurs de x_0 obtient-on un maximum G_{max}, ou un minimum G_{min}, de cette quantité (pour le cas où r est réel négatif)? Comment qualifier ces situations?

c· Quelle relation simple lie G_{max} et G_{min}? Calculer ces quantités pour $r = -0,8$

❷ **a**· Déterminer l'expression de la densité surfacique de courant $\overrightarrow{j_s}$ existante sur le miroir M'. On pourra exploiter pour cela les relations de passage du champ électromagnétique données en cours.

On montre que la force de rayonnement $\overrightarrow{F_r}$ s'exerçant sur le miroir M' de la cavité a pour expression:

$$\overrightarrow{F}_r = \frac{1}{2} \iint_{miroir} \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{B} \cdot dS$$

Exprimer la force de rayonnement $\overrightarrow{F}_r$ en fonction de $< P_+ >$.

b· En déduire le déplacement δx_0 du miroir M' résultant de cette force.

EXERCICE N°8: **Guide d'onde rectangulaire creux**

Un guide d'onde est un tuyau métallique (creux) permettant de canaliser des ondes électromagnétiques afin d'éviter leur éparpillement lors d'un transfert d'information. A titre d'exemple, une fibre optique est une sorte de guide d'ondes pour les radiations du visible (non métalliques en revanche). On considère un guide d'ondes creux, de section droite intérieure rectangulaire, de hauteur a suivant $[Ox)$, de largeur b suivant $[Oy)$, de longueur infinie suivant l'axe $[Oz)$. Ce guide est constitué par un **conducteur parfait d'épaisseur négligeable**. On étudie la possibilité de propagation dans ce guide d'une onde **transverse électrique** notée TE de la forme:

$$\overrightarrow{E} = E_0(y) e^{j(\omega t - kz)} \cdot \overrightarrow{e_x}$$

et

$$\overrightarrow{B} = \left[B_{0y}(y) \cdot \overrightarrow{e_y} + B_{0z}(y) \cdot \overrightarrow{e_z}\right] \cdot e^{j(\omega t - kz)} = \underline{\overrightarrow{B_0}}(y) \cdot e^{j(\omega t - kz)}$$

Mode **transverse électrique** signifie que le champ électrique de l'onde est perpendiculaire à la direction de propagation. On peut remarquer que dans le mode de propagation proposé ci-dessus, le champ magnétique n'est alors pas transverse (ce n'est donc pas un mode "TEM", pour **transverse électromagnétique**).

On pose: $k_c^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2$ avec k_c réel positif.

❶ Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $E_0(y)$.

❷ Montrer que k_c est un multiple entier n de $\frac{\pi}{b}$ avec $n > 0$. En déduire l'expression de $E_0(y)$ correspondant au mode de rang n et d'amplitude E_{0n}.

❸ Déterminer les composantes de l'amplitude complexe $\underline{\overrightarrow{B_0}}(y)$ du champ magnétique.

❹ Exprimer le nombre d'onde k en fonction de ω, c, n et b. En déduire l'existence d'unbe fréquence de coupure f_c en dessous de laquelle la propagation n'est plus possible. Calculer numériquement f_c pour $b = 2\ cm$.

❺ Déterminer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g de l'onde en fonction de ω, c, n, et b. Commenter.